Figure geometriche su un portale del Duomo di Prato

di Giuseppe Pirillo

Il Duomo di Prato è un gioiello di architettura arricchito da capolavori di scultura e pittura. Molti di essi sono notissimi (il pulpito di Donatello, gli affreschi di Filippo Lippi ed Agnolo Gaddi, solo per citarne alcuni), altri sono meno noti anche se paradossalmente sono costantemente sotto gli occhi di tutti. Sulla facciata laterale del Duomo delimitata dal pulpito di Donatello e dal campanile si trovano due splendidi portali. Ho potuto vederli da vicino per la prima volta nell'estate del 1963 e già da allora il *portale*[1] (Fig. 1) più vicino al campanile è stato oggetto della mia attenzione. Conseguita la maturità classica e nel 1968 definitivamente trasferita la mia residenza a Prato, non c'è stata una sola mia visita al Duomo senza una sosta per ammirare quello che d'ora in poi sarà semplicemente il *portale*.
Cos'ha di speciale? È un capolavoro d'arte romanica, di notevole fascino e bellezza come ben si addice ad un elemento architettonico concepito per permettere l'accesso ad uno spazio sacro. Inoltre da molto tempo il *portale* mi interessa anche professionalmente perché contiene figure geometriche molto particolari. Infatti contiene esplicitamente un *pentagono* ed implicitamente due *ottagoni* e un *dodecagono*. Per la precisione il disegno del pentagono (Fig. 2a) ha evidenziate solo le diagonali di un *pentagono regolare*. Questa figura geometrica è conosciuta come *pentagono intrecciato*. Ciò comporta anche un implicito riferimento al *decagono regolare*. Inoltre, con un po' di fantasia,

---

Giuseppe Pirillo, matematico Docteur dès sciences. Già Direttore di ricerca del CNR.
L'autore dedica l'articolo alla madre, Annina Cuconato. Ringrazia il fratello Mario per l'aiuto ricevuto e Claudio Cerretelli per gli utilissimi consigli.

[1] In origine, forse, era l'ingresso principale (si vedano C. Cerretelli, *L'architettura della chiesa,* in C. Cerretelli, R. Fantappiè, B. Santi, *Il Duomo di Prato,* Firenze 2009, pp 57-145; R. Fantappiè, *Le carte della propositura di S. Stefano di Prato, I, 1006-1200,* Firenze 1977, pp 332-335).

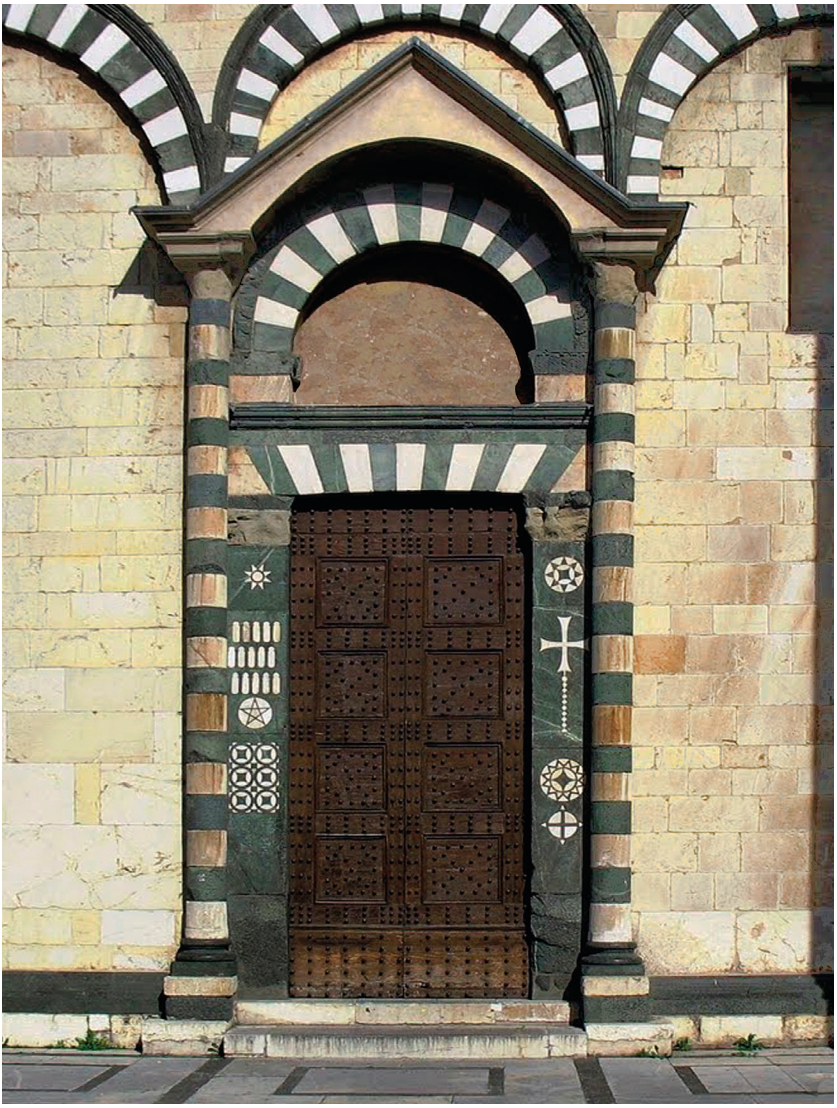


Fig. 1 Il portale del Duomo sul lato sud in prossimità del campanile.

unendo opportunamente i vertici chiaramente indicati si possono vedere due ottagoni (Fig. 2b e 2c), uno a sinistra e uno a destra, uno che sembra regolare e uno perfettamente regolare. Infine, sono chiaramente indicati i vertici di un *dodecagono regolare*[2] (Fig. 2d).
Molto probabilmente si può attribuire a Platone il detto *Dio geometrizza sempre*. L'autore del *portale*, forse, con le figure geometriche ci ricorda che stiamo

[2] In G. Pirillo, *Numeri irrazionali e segmenti incommensurabili, «Nuova Secondaria»*, 2005, n. 7, pp. 87-91, ho dimostrato risultati di incommensurabilità (si veda nota 11) relativi a ottagoni, decagoni e dodecagoni regolari.

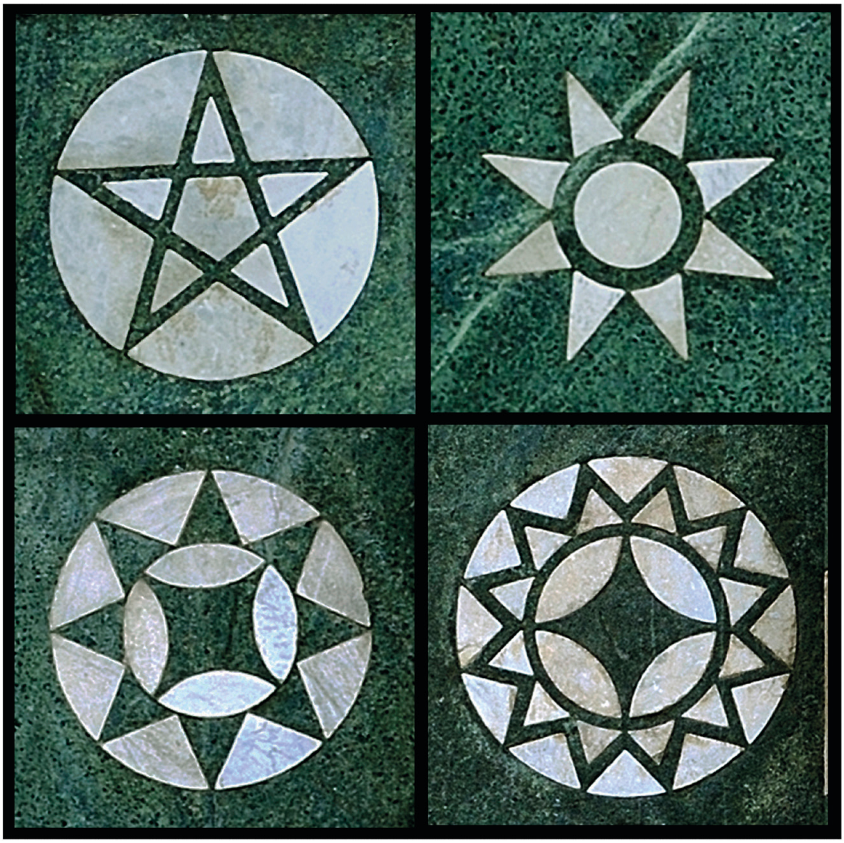


Fig. 2 Quattro rilevanti intarsi con figure geometriche del *portale*. La Fig. 2b è stata costruita da *Carboncettus* usando due numeri di Fibonacci F_n ed F_{n+2}, come per esempio 13 e 34 oppure 55 e 144.

per compiere un passo di enorme importanza: entrare nella casa del Signore. Questa è una considerazione generica che vale per ogni decorazione artistica di una chiesa. Ciò che a me importava ed importa sapere è il motivo per il quale l'artista ha scelto proprio quel tema. Ho cercato a lungo documenti e non sono riuscito nemmeno a individuare con esattezza l'anno di costruzione e non mi consola affatto che gli specialisti di storia dell'arte, pure loro, lo ignorino! Le scarne notizie sui contratti di coloro che all'epoca preparavano i progetti ed eseguivano le opere (le due attività professionali, oggi distinte, nel Medio Evo e per lungo tempo ancora erano svolte da una stessa persona) non consentono di giungere a una data accettata da tutti. Inoltre anche l'autore rimane sconosciuto ed è quindi soggetto di discussione fra gli specialisti di storia dell'arte. Le figure geometriche mi hanno sempre fatto pensare che lo sconosciuto artista con il suo portale volesse fare un ben preciso riferimento ad un *contenuto matematico*. *Carboncettus marmorarius*[3], probabile autore del *portale*, lavorava per il Capitolo della Pieve di Santo Stefano nel 1163.

[3] Si vedano Fantappiè, *Le carte*, pp. 332-335; Cerretelli, *L'architettura*, pp. 59-60, 85.

Cioè 160 anni dopo la morte di Gerbert d'Aurillac[4], uno dei più importanti matematici del Medioevo, e 39 anni prima del *Liber Abbaci*, capolavoro di Fibonacci[5], uno dei più importanti matematici di tutti i tempi.
Mi sono improvvisato cultore di storia, di storia dell'arte, di politica e di economia e ho consultato[6] molti documenti. Dall'XI al XIII secolo la storia d'Europa è stata interessata dalla *rivoluzione agricola*, dalla *rivoluzione commerciale*, dalla *rivoluzione industriale* e ha fatto registrare un grande *balzo demografico* e una notevole *fioritura urbana*. Da Gerberto (e forse addirittura da Alcuino) c'è una rinascita degli interessi per la matematica, sorretti dalle traduzioni delle opere più note dell'antichità classica (per necessità di spazio mi limito a segnalare solo la traduzione degli *Elementi* di *Euclide*). Particolarissima importanza hanno l'introduzione della *numerazione indo-araba* e gli *algoritmi* per eseguire le fondamentali operazioni aritmetiche. Ci sarebbe moltissimo da dire a questo proposito.
Tutto ciò sostiene o, quanto meno, non è in conflitto con la mia ipotesi che il *portale* avesse un chiaro contenuto matematico. Devo però aggiungere che per lungo tempo non ho trovato conferme nella letteratura scientifica e, peggio ancora, non ho nemmeno trovate notizie simili, cioè notizie di decorazioni in edifici sacri con espliciti riferimenti a risultati o contenuti matematici … almeno fino all'arrivo di un fatto veramente nuovo. Allora la mia tesi, pur restando ardita, mi è sembrata sempre meno inverosimile e sempre più sostenibile.
La decorazione geometrica della *lunetta* dell'antica entrata della Chiesa medioevale di San Nicola in Pisa (Fig. 3), che contiene una *tarsìa* con quadrati e cerchi, ha attratto l'attenzione di Pietro Armienti[7] che ha avuto per primo l'intuizione (sottoposta ad una attentissima verifica) che il disegno della *tarsìa* era basato sui primi 9 numeri della successione di Fibonacci[8]. Inoltre Antonio Albano ha confermato l'intuizione di Armienti costruendo,

---

[4] Gerbert d'Aurillac, Silvestro II, papa dell'anno 1000. Ha conosciuto la scienza araba e, in particolare, la matematica (si veda P. Riché, Gerbert d'Aurillac le pape de l'an mil, Paris 1987).
[5] Fibonacci (Leonardo Pisano o Bigollo). A Bugia apprende la matematica araba che contribuisce a diffondere in Europa. L'influenza di Fibonacci in matematica e in informatica è notevolissima anche oggi. Si veda l'articolo di D.E. Knuth, J.H. Morris, V.R. Pratt, *Fast pattern matching in strings*, «SIAM Journal on Computing», 1977, v. 6 f. 2, pp. 323–350 (Knuth è uno dei più importanti informatici viventi).
[6] Atti delle Settimane di Studi dell'Istituto Internazionale di Storia Economica, «Archivium Bobiense», diversi testi di storia e di storia della matematica e ovviamente diverse pubblicazioni su Federico II, il famosissimo *stupor mundi*, e su Gioacchino da Fiore, «lo calavrese abate Gioacchino di spirito profetico dotato» (Dante, *Paradiso* XII, 140-141), autore di un *Liber Figurarum*.
[7] P. Armienti, *The medieval roots of modern scientific thought. A Fibonacci abacus on the facade of the church of San Nicola in Pisa*, «Journal of Cultural Heritage», v. 17, 1-6, January-February 2016. Armienti insegna presso il Dipartimento di Scienze della Terra dell'Università di Pisa, che ha sede a pochi metri dalla chiesa di San Nicola.
[8] G. Pirillo, *Fibonacci numbers and words*, «Discrete Mathematics», v. 173 (1-3), 1997, pp. 197–207.

Fig. 3 La tarsìa della chiesa di San Nicola a Pisa sulla quale Pietro Armienti ha rilevato i primi nove numeri di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55). La scoperta di Armienti è stata poi confermata da Antonio Albano.

con riga e compasso, un modello grafico semplificato della decorazione nella lunetta per mostrare come vi siano presenti due temi: la *successione di Fibonacci* nel disegno della tarsìa e il calcolo della *sezione aurea* con la decorazione geometrica lineare che contorna la tarsìa[9].

Ora, se Armienti e Albano hanno ragione nel sostenere i riferimenti ai numeri di Fibonacci e alla sezione aurea (e io sono convinto che abbiano ragione!), non è più un fatto nuovo, almeno in letteratura, che una decorazione di una chiesa abbia un esplicito contenuto matematico. Inoltre se i miei riferimenti matematici del *portale* di Prato sono davvero corretti allora essi costituiscono un caso storicamente precedente a quello pisano. Per spiegarmi bene (o, almeno, per provarci), devo parlare di *segmenti incommensurabili*[10] e di altri termini matematici: cercherò di essere quanto più chiaro possibile ma ricordo che in matematica un minimo di lavoro personale è inevitabile per chi voglia capire davvero.

La *Scuola Pitagorica* ha dimostrato che lato e diagonale del pentagono regolare sono incommensurabili[11]. Questo straordinario risultato è direi un

[9] A. Albano, *The Fibonacci Sequence and the Golden Section in a Lunette Decoration of the Medieval Church of San Nicola in Pisa*, «Territori della Cultura», ottobre 2015 (edito nel 2016), n. 21, pp. 48-59. L'articolo di Albano, del Dipartimento di informatica dell'Università di Pisa, è scaricabile da: http://www.comune.pisa.it/uploads/2016_04_19_13_09_40.pdf

[10] Si veda ad esempio Pirillo, *Numeri,* e nota 11 seguente.

[11] La Scuola è ben documentata ed attiva a Crotone nel VI-IV sec. a.C. La seguente definizione è di origine pitagorica: *Grandezze commensurabili sono dette quelle misurate con la stessa misura, incommensurabili quelle di cui non è possibile che risulti nessuna misura comune* (Euclide, *Elementi*, Libro X, nella traduzione di Fabio Acerbi, Euclide, *Tutte le opere*, Milano 2007, pp. 1230-1231). La Scuola conosceva anche la *Proposizione Pitagorica* (*una successione strettamente decrescente di interi positivi è necessariamente finita*) per la quale si veda il citato

naturale riferimento matematico del pentagono intrecciato. Sono tuttavia convinto che ci sia anche un secondo riferimento: i numeri di Fibonacci. L'incommensurabilità di lato e diagonale del pentagono regolare è stata ottenuta dopo una verosimilmente lunga serie di tentativi falliti che miravano esattamente al risultato opposto: trovare un'opportuna unità di misura U e due opportuni interi β ed α tali che U fosse contenuta esattamente β volte nel lato ed α volte nella diagonale di un pentagono regolare. Con una mia analisi dettagliata di questi tentativi falliti[12] e con un programma preparato da mio fratello Mario ho trovato la tavola seguente:

β	α	$\alpha+\beta$	$\beta(\alpha+\beta)$	α^2
1	1	2	1^2+1	1^2
1	2	3	2^2-1	2^2
2	3	5	3^2+1	3^2
3	5	8	5^2-1	5^2
5	8	13	8^2+1	8^2
8	13	21	13^2-1	13^2
13	21	34	21^2+1	21^2
21	34	55	34^2-1	34^2
34	55	89	55^2+1	55^2
55	89	144	89^2-1	89^2
89	144	233	144^2+1	144^2
144	233	377	233^2-1	233^2
233	377	610	377^2+1	377^2
377	610	987	610^2-1	610^2
610	987	1597	987^2+1	987^2
987	1597	2584	1597^2-1	1597^2

i numeri di Fibonacci sono $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, ..., F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, ... In generale si ha $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Nella tavola i numeri di Fibonacci sono dappertutto: nella prima, seconda e terza colonna. I quadrati dei numeri di Fibonacci sono nella quinta colonna mentre la quarta contiene alternativamente il loro predecessore e il loro successore. Dunque, lo studio del pentagono regolare ha condotto la *Scuola Pitgorica* sia alla scoperta dei segmenti incommensurabili sia a quella dei numeri di Fibonacci[13]. Penso dunque che il pentagono intrecciato del *portale* si riferisca ai numeri di Fibonacci sia per la posizione che occupa sia per le ragioni che preciserò meglio qui di seguito. Inoltre ritengo che fosse antica abitudine quella di esporre contenuti mate-

articolo di Pirillo, *Numeri*. Ora se esistesse una misura comune tra lato e diagonale del pentagono regolare (Fig. 4a), allora esisterebbero un segmento U e due interi positivi β ed α tali che U è contenuto β volte nel lato ed α volte nella diagonale. Per β ed α considerazioni geometriche implicano la proporzione $\beta : \alpha = \alpha : (\beta + \alpha)$ e dunque l'uguaglianza $\beta(\beta+\alpha) = \alpha^2$. Ma due interi positivi β ed α non possono verificare $\beta(\alpha + \beta) = \alpha^2$. Infatti: i) se β e α sono entrambi dispari allora $\beta(\beta + \alpha)$ è pari ed α^2 è dispari, contraddizione; ii) se β è dispari ed α è pari allora $\beta(\beta + \alpha)$ è dispari ed α^2 è pari, contraddizione; iii) se β è pari ed α è dispari allora $\beta(\beta + \alpha)$ è pari ed α^2 è dispari, contraddizione; iv) se β ed α sono entrambi pari allora usando la *Proposizione Pitagorica* ritroviamo uno dei tre casi i), ii) e iii) già esclusi in precedenza, contraddizione. Pertanto β ed α non possono essere entrambi interi: lato e diagonale del pentagono regolare non possono avere una misura comune e la loro incommensurabilità è dimostrata.

[12] G. Pirillo, *On some recent results of Fibonacci numbers, Fibonacci words and Sturmian words*, «Southeast Asian Bulletin of Mathematics», in corso di stampa sul prossimo numero e G. Pirillo, *La scuola pitagorica ed i numeri di Fibonacci*, Archimede, 2, 2017.

[13] I quali sono caratterizzati dall'*identità di Cassini*.

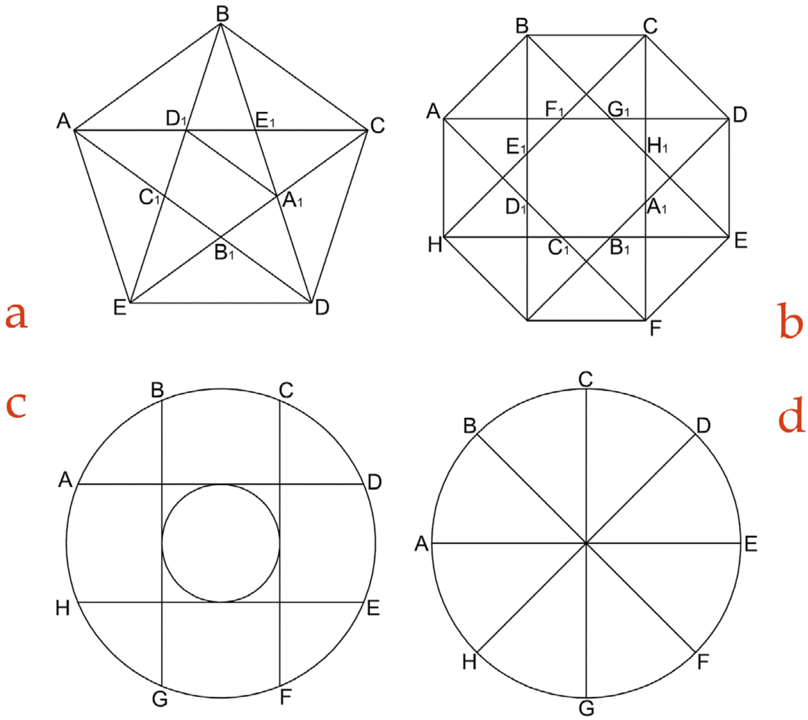
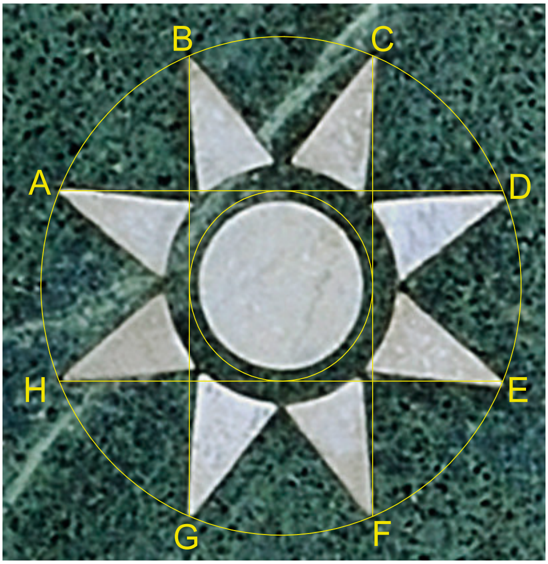


Fig. 4 La figura 4a è usata nella ricostruzione della dimostrazione pitagorica dell'incommensurabilità di lato e diagonale del pentagono regolare; la 4b è usata in PIRILLO, *Numeri*, per dimostrare l'incommensurabilità dei lati dei due ottagoni regolari; la 4c può essere considerata come il progetto di *Carboncettus* per costruire, con due numeri di Fibonacci, un ottagono che - pur non essendolo - sembra regolare; la figura 4d è usata per costruire un ottagono regolare del quale sia noto il raggio della circonferenza circoscritta.

matici - e non solo - anche complessi tramite l'uso di figure[14].
Nell'ottagono di sinistra del *portale* "leggo" una particolare procedura per costruire un ottagono, l'*ottagono di Carboncettus*. Per la precisione si tratta di un ottagono che dipende dalla scelta di un numero di Fibonacci. Si disegnino (Fig. 4c) due cerchi concentrici, le due rette orizzontali tangenti al cerchio interno e le due rette verticali tangenti allo stesso cerchio interno. Queste quattro rette tagliano il cerchio più grande in otto punti che sono vertici di un ottagono e, se il diametro del cerchio più piccolo è dato da un numero di Fibonacci, diciamo F_n, e quello del cerchio più grande è dato da F_{n+2} allora l'ottagono di *Carboncettus*, pur non essendolo, sembra proprio essere regolare[15]! Intendo dire che l'ottagono di *Carboncettus* e l'ottagono

---

[14] Il pentagono intrecciato non sarebbe il primo caso di figura geometrica usata per indicare una classe di numeri. Ad esempio (Fig. 7), i *numeri triangolari* sono: a) di chiarissima attribuzione pitagorica; b) forniscono la somma dei primi n numeri interi $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; c) sono rappresentati da triangoli! Alcuino di York (contemporaneo di Carlo Magno!) li ricordava nelle sue *Propositiones ad acuendos juvenes,* e Gauss calcolava rapidamente il centesimo *numero triangolare* $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$.
[15] Scelti due numeri di Fibonacci F_n ed F_{n+2}, l'ottagono di *Carboncettus* ha tutti gli angoli interni di 135 gradi, quattro lati (orizzontali e verticali) lunghi F_n ed i restanti quattro di lunghezza $d_n = \sqrt{2}\left[\sqrt{\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{F_n}{2}\right)^2} - \frac{F_n}{2}\right]$. Il lettore può verificare facilmente che d_n è leggermente maggiore di F_n e che uno dei lati lunghi d_n ha gli estremi nei due punti



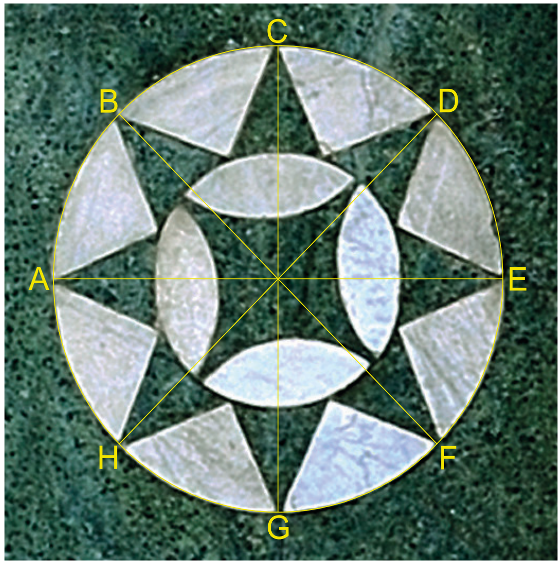


Fig. 5 Rappresenta la figura 2b alla quale è sovrapposta la 4c. Il lettore noterà una certa imprecisione, legata all'esecuzione della tarsìa, ma l'idea di *Carboncettus* è chiarissima.

Fig. 6 Rappresenta la figura 2c alla quale è sovrapposta la 4d. Il lettore noterà come *Carboncettus* sembri proprio indicare gli assi cartesiani.

regolare sono praticamente indistinguibili! Qui non ho spazio sufficiente per riportare tutto ciò che mi piacerebbe dire sull'ottagono di *Carboncettus*[16]. La procedura appena descritta è chiaramente suggerita dalla particolare fattura dell'ottagono di sinistra del portale[17]: i vertici coincidono con otto vertici di otto triangoli (Fig. 2b). Preciso che si sceglie un solo vertice per ogni triangolo. I due triangoli in alto hanno ciascuno un lato verticale. Anche i due triangoli in basso hanno ciascuno un lato verticale. Questi quattro lati verticali appartengono a due sole rette che dovrebbero essere tangenti al cerchio che sta al centro dell'ottagono. Analogamente i due triangoli a sinistra hanno ciascuno un lato orizzontale. Anche i due triangoli a destra hanno ciascuno un lato orizzontale. Similmente questi quattro lati orizzontali appartengono a due sole rette che dovrebbero essere tangenti al cerchio

---

$P_n = \left(\frac{F_n}{2}, \sqrt{\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{F_n}{2}\right)^2}\right)$ e $Q_n = \left(\sqrt{\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{F_n}{2}\right)^2}, \frac{F_n}{2}\right)$ del primo quadrante. Indichiamo con e_n la lunghezza del lato dell'ottagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio F_{n+2}. Sia $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Al crescere di n abbiamo: a) il rapporto fra d_n ed F_n si avvicina rapidamente al valore $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{\Phi^4 - 1} - 1\right]$, le cui prime sei cifre significative sono 1,00375, b) il rapporto tra d_n ed e_n si avvicina rapidamente a $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\left[\sqrt{1 - \Phi^{-4}} - \Phi^{-2}\right]$, le cui prime sei cifre significative sono 1,00187 e c) il rapporto tra e_n ed F_n si avvicina rapidamente a $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Phi^2$, le cui prime sei cifre significative sono 1,00187.

16 Al lettore attento ed esperto di matematica non sarà sfuggito che nella nota precedente ho fatto allusione alla nozione di *limite*.

17 Nella tarsìa di Pisa (Fig. 3) "ritrovo" gli stessi suggerimenti già letti sul portale per la costruzione dell'ottagono di *Carboncettus*. L'artista della tarsìa usa un cerchio di raggio 55 contenente otto cerchi a quest'ultimo tangenti internamente ed aventi raggio 21 e due quadrati uno inclinato di 45 gradi rispetto all'altro.

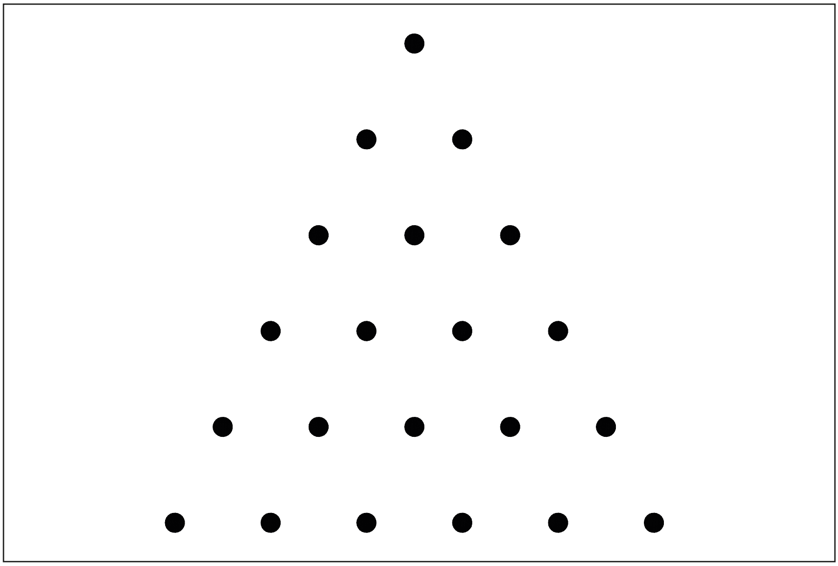


Fig. 7 Per la trasmissione del sapere - matematico e non solo - le figure hanno sempre giocato e giocano ancora un ruolo centrale, particolarmente nel periodo del quale ci stiamo occupando (si veda il *Liber Figurarum* di Gioacchino da Fiore). Per quel che riguarda la matematica, sono ben note le figure geometriche che rappresentano i numeri triangolari (si veda la figura qui riprodotta), i numeri quadrati eccetera. Probabilmente segmenti incommensurabili e numeri di Fibonacci sono stati scoperti contemporaneamente dalla Scuola Pitagorica (cfr. Pirillo, *On some recent results*) e, pertanto, il pentagono stellato del Duomo - almeno per me - può legittimamente rappresentare anche i numeri di Fibonacci.

che sta al centro dell'ottagono. Se si tiene conto di alcune imprecisioni, tutto è come nella precedente descrizione teorica[18] (si vedano Figg. 2b, 4c e 5). La costruzione geometrica dell'ottagono di destra è molto più semplice (Fig. 2c). Si considerino due assi cartesiani ortogonali, la retta bisettrice del primo e del terzo quadrante e la retta bisettrice del terzo e del quarto quadrante. Si considerino gli otto punti intercettati su una circonferenza con centro nell'origine degli assi. In questo caso l'ottagono costruito è regolare (si vedano Figg. 2c, 4d e 6).

Mi piace immaginare *Carboncettus* fiero di conoscere la matematica e desideroso di farla conoscere. Sembra quasi che dica: *L'ottagono di sinistra è fatto in questo modo e quello di destra in quest'altro modo!*

Tutto ciò premesso, vorrei dire che le realtà alle quali si riferiscono la parte sinistra e la parte destra del portale sono anch'esse diverse tra loro. La parte sinistra comprende degli archetti (due serie di cinque "*a tutto sesto*" ed un'altra serie di cinque "*a sesto acuto*") che mi fanno pensare alle concrete tecniche di costruzione nei cantieri. In alto c'è un ottagono costruito usando i numeri di Fibonacci. Pertanto anche il pentagono intrecciato probabilmente si riferisce ai numeri di Fibonacci (se l'artista avesse voluto riferirsi alla sezione aurea $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il rapporto perfetto, la *Divina Proporzione* come più

[18] La pratica sovrapponibilità dell'ottagono di *Carboncettus* e dell'ottagono regolare comporta che il primo potrebbe anche essere in relazione con la costruzione dell'ottagono in Pirillo, *Numeri*. Si veda la Fig. 4b. Ma se così fosse stato *Carboncettus* non avrebbe avuta alcuna necessità di evidenziare il cerchio interno e, d'altra parte, avrebbe quasi certamente evidenziato l'ottagono interno.

tardi dirà Luca Pacioli, probabilmente l'avrebbe posto nella parte destra). Il pentagono intrecciato si riferisce ad approssimazioni (i rapporti fra i numeri consecutivi di Fibonacci)[19] cioè a una realtà non perfetta, umana [20].
Sul lato destro, invece, l'artista si riferisce a realtà divine: l'ottagono perfettamente regolare e la Croce, che è chiaramente l'elemento più importante del *portale*.

[19] Forse non avrei mai riflettuto sull'origine pitagorica dei numeri di Fibonacci se non avessi avuto la necessità di comprendere il senso del pentagono intrecciato del *portale* del Duomo di Prato!
[20] Si sa che i rapporti tra F_{n+1} ed F_n tendono a Φ ma nessuno di essi è Φ, cioè il rapporto perfetto, la Divina Proporzione.